2023
Mathematics
गणित

Time: 3 hours **Maximum Marks: 200**

समय: 3 घंटे अधिकतम अंक : 200

Question paper specific instructions

प्रश्न प्रत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

1. **This paper is divided into two Sections, Section-A and Section-B.**
   ये प्रश्नपत्र दो खंडों में विभाजित है, खंड-A और खंड-B

2. **Each Section contains four (4) questions.**
   प्रत्येक खंड में चार प्रश्न है।

3. **Candidate has to attempt five questions in all.**
   परीक्षार्थी को पांच प्रश्नों का उत्तर लिखना है।

4. **Question Nos. 1 and 5 are compulsory and out of the remaining, THREE questions are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.**
   प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य है और शेष प्रश्नों में से किन्हीं तीन का उत्तर लिखना है,
   प्रत्येक खंड से एक प्रश्न को हल करना है।

5. **Word limit in questions, where specified, should be adhered to.**
   प्रश्नों में शब्द सीमा, जहाँ विनिर्दिष्ट है, का अनुसरण किया जाना चाहिए।

6. **The number of marks carried by a question/part is indicated against it.**
   प्रत्येक प्रश्न/ भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।

7. **Questions are printed in English & Hindi languages. In case of any ambiguity in translation of any question, English version shall be treated as final.**
   प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों भाषाओं में छपा है। प्रश्नों के अनुवाद में किसी अस्पष्टता की स्थिति में,
   अंग्रेजी सस्करण को ही अन्तिम माना जाएगा।

Section A (खंड अ)

Q1. Write answers of the following questions.
निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए

1(a) Let A be a 3×3 matrix whose eigenvalues are -1, 1 and 2 respectively. Find the value of α, β and γ such that $A^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$. (8)

मान लीजिए A एक 3×3 मैट्रिक्स है जिसका आयजन मान क्रमशः -1, 1 और 2 है। α, β और γ का मान इस प्रकार ज्ञात करें कि $A^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$.

1(b) Solve $x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = x\left[2\cos^2\left(\frac{\log x}{2}\right) - 1\right]$. (8)

हल करें $x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = x\left[2\cos^2\left(\frac{\log x}{2}\right) - 1\right]$.

1(c) For the motion of a particle along a circle, find the angle between its position vector and the velocity vector. (8)

एक वृत्त के अनुदिश किसी कण की गति के लिए, उसके स्थिति वेक्टर और वेग वेक्टर के बीच का कोण ज्ञात करें।

1(d) Use the method of Lagrange multipliers to find the minimum value of $x^2 + y^2 + z^2$ subject to the constraint $xyz = a^2$. (8)

लैग्रेंज मल्टीप्लायरों की विधि का उपयोग करके, $x^2 + y^2 + z^2$ का न्यूनतम मान बाधा $xyz = a^2$ प्रतिबंध के अधीन ज्ञात करने करें।

1(e) Find the equation of tangent planes to the hyperboloid $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ which pass through the line $3x - 3y + 6z - 5 = 0 = x + 9y - 3z$. (8)

हाइपरबोलॉइड $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ के स्पर्शरेखा तलों का समीकरण ज्ञात करें जो रेखा $3x - 3y + 6z - 5 = 0 = x + 9y - 3z$ से होकर गुजरते हैं।

Q2. Write answers of the following questions.
निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए

2(a) Find the orthogonal trajectories of $x^2 + y^2 - 2Cy = 0$, where C is a constant. (10)

$x^2 + y^2 - 2Cy = 0$, का ओर्थोगोनल प्रक्षेप पथ ज्ञात करें जहां C एक स्थिरांक है।

2(b) Let A_n be the $n \times n$ matrix such that $a_{i,j} = 2\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}$ where $\delta_{i,j}$ equals 1 if $i = j$ and zero otherwise. Compute $det(A_n)$. (15)

मान लीजिए A_n एक $n \times n$ मैट्रिक्स है जिसके लिए $a_{i,j} = 2\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}$ जहां $\delta_{i,j}$ यदि $i = j$ है तो 1 के बराबर है और अन्यथा शून्य है। $\det(A_n)$ की गणना करें।

2(c) Find the critical points of $f(x,y) = \exp\left(-\frac{1}{3}x^3 + x - y^2\right)$ and check if they are relative maximum or relative minimum or saddle points. (15)

$f(x,y) = \exp\left(-\frac{1}{3}x^3 + x - y^2\right)$ के महत्वपूर्ण बिंदु खोजें और जांचें कि क्या वे सापेक्ष अधिकतम हैं या सापेक्ष न्यूनतम या सैडल अंक।

Q3. Write answers of the following questions.

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए

3(a) Find the equation of a cone whose vertex is the point (α, β, γ) and whose generating lines passes through the conic $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1;\ z = 0$. (10)

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष बिंदु (α, β, γ) है और जिसकी उत्पन्न करने वाली रेखाएँ शंकु $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y2}{b^2} = 1;\ z = 0$।

3(b) Find the general solution of $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$. (15)

$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$. का सामान्य समाधान ज्ञात करें

3(c) Evaluate the integral $\iiint_T zdxdydz$, where T is the region bounded by the cone $z^2 = x^2 \tan^2\alpha + y^2 \tan^2\beta$ and the planes $z = 0$ to $z = h$ in the first octant. (15)

समाकल $\iiint_T zdxdydz$ का मूल्यांकन करें, जहां T शंकु से घिरा क्षेत्र है $z^2 = x^2 \tan^2\alpha + y^2\, tan^2\beta$ और पहले अष्टक में समतल $z = 0$ से $z = h$।

Q4. Write answers of the following questions.

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए

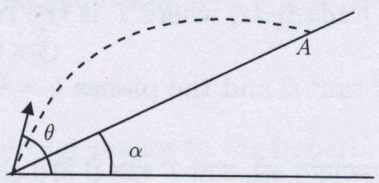
4(a) A magic square of order N is an $N \times N$ matrix with positive integral entries such that the elements of every row , every column and the two diagonals all add up to the same number. If a magic square is filled with numbers in arithmetic progression starting with $a \in \mathbb{N}$ and common difference $d \in \mathbb{N}$, then what is the value of this common sum. (10)

N क्रम का एक जादुई वर्ग है जो की एक N × N मैट्रिक्स है जिसमें सकारात्मक अभिन्न प्रविष्टियाँ होती हैं जैसे कि प्रत्येक पंक्ति, प्रत्येक स्तंभ और दो विकर्णों के तत्व सभी एक ही संख्या में जुड़ते हैं। यदि एक जादुई वर्ग a ∈N से शुरू होने वाली अंकगणितीय प्रगति में संख्याओं से भरा है और सामान्य अंतर d ∈N है, तो इस सामान्य योग का मूल्य क्या है।

4(b) Verify the Green's theorem for the field $\vec{F}(x, y) = (x - y)\hat{i} + x\hat{j}$ and the region A bounded by a circle of radius R and centered at (a, b). (15)

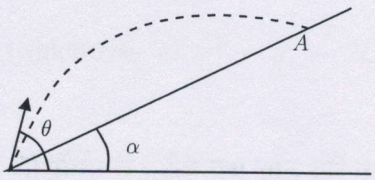
फ़ील्ड $\vec{F}(x, y) = (x - y)\hat{i} + x\hat{j}$ और त्रिज्या R के एक वृत्त से घिरा क्षेत्र A के लिए ग्रीन के प्रमेय को सत्यापित करें और (a, b) पर केन्द्रित है।

4(c) A ball is projected upwards with a velocity u at an angle θ with the horizontal from the foot of an inclined plane of angle of inclination α with the horizontal (as shown in the following figure). (15)



The ball hits the point A on the inclined plane at a distance R along the plane. Find the maximum value of R.

एक गेंद को क्षैतिज के साथ θ के झुकाव वाले कोण के झुकाव वाले तल से क्षैतिज के साथ θ पर वेग u के साथ ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है (जैसा कि निम्नलिखित चित्र में दिखाया गया है)



गेंद झुके हुए तल पर समतल के अनुदिश R की दूरी पर बिंदु A से टकराती है। R का अधिकतम मूल्य ज्ञात कीजिए।

Section B (खंड ब)

Q5. Write answers of the following questions.

5(a) Find a rearrangement of the following system of equations that guarantees the Gauss-Seidel iteration of the system will converge to the unique solution of the system for any initial guess (x_0): (8)

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 40$$
$$10x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10$$
$$x_1 - 10x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20$$
$$x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 4x_4 = 30$$

Further, find an approximate solution (correct to four decimal places) of the system by carrying out three iterations of the Gauss Seidel method using initial guess (0, 0, 0, 0).

समीकरणों की निम्नलिखित प्रणाली की पुनर्व्यवस्था खोजें जो गारंटी देती है कि सिस्टम का गॉस-सीडेल पुनरावृत्ति विधि किसी भी प्रारंभिक अनुमान के लिए सिस्टम के अनूठे समाधान में परिवर्तित हो जाएगा (x_0):

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 40$$
$$10x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10$$
$$x_1 - 10x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20$$
$$x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 4x_4 = 30$$

इसके अलावा, प्रारंभिक अनुमान (0, 0, 0, 0) का उपयोग करके गॉस सीडेल विधि के तीन पुनरावृत्तियों को पूरा करके सिस्टम का एक अनुमानित समाधान (चार दशमलव स्थानों तक सही) खोजें।

5(b) For a function $u = u(x, y)$, find the general integral of the following PDE (8)

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 (+ x + y)^2.$$

किसी फलन $u = u(x, y)$ के लिए, निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण का व्यापक समाकल ज्ञात कीजिए।

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 (+ x + y)^2.$$

5(c) Prove that the image of a compact set under a continuous map is compact.

सिद्ध कीजिए कि सतत मानचित्र के अंतर्गत एक संहत सेट की छवि संहत होती है। (8)

5(d) Prove or disprove: Klein 4-group is isomorphic to the cyclic group $\{\pm 1, \pm i\}$.

सिद्ध करें या असिद्ध करें: क्लेन 4-समूह चक्रीय समूह $\{\pm 1, \pm i\}$ के समरूपी है (8)

5(e) Let C be the boundary of the triangle with vertices at the points 0, 3i, and -4 oriented clockwise. Then compute the contour integral (8)

मान लीजिए कि C त्रिभुज की सीमा है जिसके शीर्ष बिंदु 0, 3i, और -4 पर दक्षिणावर्त दिशा में उन्मुख हैं। फिर समोच्च समाकल की गणना करें

$$\int_C (e^z - \bar{z})\,dz.$$

Q6. Write answers of the following questions.

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए

6(a) Use Gaussian Elimination Method to find all possible values of k for which following system of equations has infinitely many solutions. (10)

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + kz &= -1 \\ x + k^2 z &= k + 2 \end{aligned}$$

k के सभी संभावित मान ज्ञात करने के लिए गॉसियन उन्मूलन विधि का उपयोग करें जिसके लिए समीकरणों की निम्नलिखित प्रणाली में अनंत रूप से कई समाधान हैं।

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + kz &= -1 \\ x + k^2 z &= k + 2 \end{aligned}$$

6(b) Show that $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ is a hyperbolic partial differential equation and solve it. (15)

दिखाएँ कि $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ एक अतिपरवलयिक आंशिक अवकल समीकरण है और इसे हल करें।

6(c) Find the value of the integral $g(z)$ around the circle $|z - i| = 2$ oriented counterclockwise, when (15)

$$g(z=) \frac{1}{z(z^2+4)}.$$

वृत्त $|z - i| = 2$ के चारों ओर समाकल $g(z)$ का मान वामावर्त दिशा में ज्ञात कीजिए, जब

$$g(z=) \frac{1}{z(z^2+4)}.$$

Q7. Write answers of the following questions.
निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए

7(a) Show that the homomorphic image of a principal ideal ring is a principal ideal ring.
दिखाएँ कि एक प्रमुख आदर्श वलय की समरूपी छवि एक प्रमुख आदर्श वलय है। (10)

7(b) Simplify the following expression using Karnaugh Map. (15)

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4$$

कार्नो प्रतिचित्र का उपयोग करके निम्नलिखित अभिव्यक्ति को सरल करें। $y = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4$

7(c) Consider a Lagrangian defined as (15)

$$L = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2\right)e^{\alpha t},$$

where $m > 0$, $k > 0$ and α is a real constant. Derive the corresponding equation of motion and solve it. Further, derive the condition on α to make the solution damped oscillatory motion.

माना कि परिभाषित लगरानजियन

$$L = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2\right)e^{\alpha t},$$

जहां $m > 0$, $k > 0$ तथा α एक वास्तविक अचर है। संबंधित गति का समीकरण प्राप्त करें तथा इसे हल करें। इसके अतिरिक्त, गति को अवमंदित दोलन गति बनाने के लिए α पर प्रतिबंध प्राप्त करें।

Q8. Write answers of the following questions.

8(a) Find the complete solution of (10)

$$(D^2 - DD' - 2D)z = \sin(3x + 4y) - e^{(2x+y)},$$

where $D = \frac{\partial}{\partial x}$ and $D' = \frac{\partial}{\partial y}$.

पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए

$$(D^2 - DD' - 2D)z = \sin(3x + 4y) - e^{(2x+y)},$$

जहां $D = \frac{\partial}{\partial x}$ तथा $D' = \frac{\partial}{\partial y}$ है।

8(b) Consider $f_n : [0, 1] \longrightarrow R$ defined as (15)

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Discuss the point-wise convergence and uniform convergence of $\{f_n\}$.

$f_n : [0, 1] \longrightarrow R$ को इस रूप में परिभाषित किया गया है

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2 + (1 - nx)^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$\{f_n\}$ के बिंदुवार अभिसरण और एकसमान अभिसरण पर चर्चा करें।

8(c) Consider the problem of assigning five jobs to five persons. The assignment costs are as follows: (15)

Person \ Job	1	2	3	4	5
A	8	4	2	6	1
B	1	10	6	6	5
C	3	8	9	2	6
D	5	4	2	1	4
E	9	5	8	9	5

Using Hungarian Method, determine the optimum assignment schedule and optimum cost.

पाँच व्यक्तियों को पाँच कार्य सौंपने की समस्या पर विचार करें। असाइनमेंट की लागत इस प्रकार है:

Person \ Job	1	2	3	4	5
A	8	4	2	6	1
B	1	10	6	6	5
C	3	8	9	2	6
D	5	4	2	1	4
E	9	5	8	9	5

हंगेरियन पद्धति का उपयोग करते हुए, इष्टतम असाइनमेंट शेड्यूल और इष्टतम लागत निर्धारित करें।